Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis III — WS 2012/13, Serie 11
Prof. Dr. G. Wang — 14.1.2013
Dr. R. Alessandroni

Aufgabe 1 (4 Punkte)
a) Man berechne das Volumen des Kugelsektors, der in dreidimensionalen Polarkoordinaten durch die Ungleichungen $0 \le r \le r_0, 0 \le \theta \le \theta_0$ gegeben ist ($r_0 > 0, 0 < \theta_0 < \pi$).
b) Sei $\alpha > 0$ und $R > 0$. Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \le R^2; y^2 + z^2 \le \alpha x^2\}$$

Skizzieren Sie die Menge A.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $r : [a,b] \to (0,\infty)$ stetig und sei (ξ, χ) der Schwerpunkt der Fläche

$$F := \{(x,z) | z \in [a,b], 0 \le x \le r(z)\},$$

d.h.

$$\xi = \frac{1}{\mathcal{L}^2(F)} \int_F x d\mathcal{L}^2(x,z) \text{ und } \chi = \frac{1}{\mathcal{L}^2(F)} \int_F z d\mathcal{L}^2(x,z).$$

Sei A der durch Rotation von F um die z-Achse entstehende Körper. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^3(A) = 2\pi\xi\mathcal{L}^2(F)$ (*Guldinsche Regel*).

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei T der Volltorus, welcher durch Rotation der Kreisscheibe K mit $K = \{(x,z)|(x-R)^2 + z^2 \le r^2\}$, $0 < r < R$ um die z-Achse entsteht. Berechnen Sie das Volumen von T und verifizieren Sie hieran die Guldinsche Regel.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei K die Kugelschale $K := \{x \in \mathbb{R}^3 : r \le |x| \le R\}$, $0 < r < R < \infty$. Man berechne das Integral (Potential einer Kugelschale)

$$u(\xi) := \int_K \frac{1}{|x - \xi|} d^3x,$$

für die Fälle $\xi < r$, $r \le |\xi| \le R$ und $|\xi| > R$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 21.1.13 bis 12:00**.